FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS SOBRE LOS NÚMEROS ÍNDICES

Efraín A. López
Escuela de Estadística
Universidad de Los Andes

Resumen.- En este artículo se expone un ingenioso método matemático para obtener las fórmulas sobre los números índices, que fue ideado por F. Divisia en 1925-1926 (Divisia, 1926). Bajo determinadas condiciones iniciales, la solución de la ecuación diferencial general, origina los números índices comunes en la literatura de la Estadística Económica.

0 Introducción

El método ideado por Divisia (Divisia, 1926), se basa en la utilización de una ecuación diferencial general, cuya solución particular, bajo determinadas condiciones iniciales, da origen a los números índices: de Laspeyres, Paasche, Fisher, Marshall y Keynes.

Suponga que el valor de un conjunto de artículos, en un periodo. "t", pueda ser expresado como:

$$V_t = \sum_{i=1}^{i=n} p_{it}\, q_{it} = P_t\, Q_t$$

Donde P_t representa el nivel general de precios en el período "t", y Q_t el volumen total físico en el mencionado período. Si se está interesado, en la medida del nivel de precios P_t, entonces cualquier cambio en el valor de V_t, puede ser el resultado de un cambio en los precios o un mbio en las cantidades consumidas. Por lo tanto, diferenciando, se tiene:

$$dV_t = P_t dQ_t + Q_t dP_t = \sum_{i=1}^{i=n} \left(p_{it} dq_{it} + q_{it} dp_{it} \right)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dV_t}{P_t Q_t} = \frac{P_t dQ_t + Q_t dP_t}{P_t Q_t} = \frac{\sum_{i=1}^{i=n} \left(p_{it} dq_{it} + q_{it} dp_{it} \right)}{P_t Q_t}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dQ_t}{Q_t} + \frac{dP_t}{P_t} = \frac{\sum_{i=1}^{i=n} \left(p_{it} dq_{it} + q_{it} dp_{it} \right)}{P_t Q_t} = \frac{\sum_{i=1}^{i=n} \left(p_{it} dq_{it} + q_{it} dp_{it} \right)}{\sum_{i=1}^{i=n} p_{it} q_{it}}$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{i=n} p_{it} dq_{it}}{\sum_{i=1}^{i=n} p_{it} q_{it}} + \frac{\sum_{i=1}^{i=n} q_{it} dq_{it}}{p_{it} q_{it}}$$

Separando esta última ecuación en dos ecuaciones diferenciales, se tiene:

$$
\begin{cases}
\dfrac{dQ_t}{Q_t} = \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{i=n} p_{it}\; dq_{it}}{\sum\limits_{i=1}^{i=n} p_{it}\; q_{it}} & \text{(I)} \\[2ex]
\hline
\dfrac{dP_t}{P_t} = \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{i=n} q_{it}\; dp_{it}}{\sum\limits_{i=1}^{i=n} p_{it}\; d_{it}} & \text{(II)}
\end{cases}
$$

Considere la segunda ecuación diferencial, y suponga que las cantidades consumidas q_{it} en el período comparado, son proporcionales a aquellas consumidas en el periodo base "o" , es decir:

$$\frac{q_{it}}{q_{io}} = k \Rightarrow q_{it} = kq_{io}$$

Por lo tanto:

$$\frac{dP_t}{P_t} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{i=n} q_{it}\, dp_{it}}{\sum\limits_{i=1}^{i=n} p_{it}\, q_{it}} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{i=n} q_{io} dp_{it}}{\sum\limits_{i=1}^{i=n} q_{io}\; p_{it}} = \frac{d\,(\sum\limits_{i=1}^{i=n} p_{it}\, q_{io})}{\sum\limits_{i=1}^{i=n} p_{it}\, q_{io}}$$

Donde P_t y p_{it} son variables y $q_{it} = k\ q_{io}$ es constante. Integrando ambos miembros de esta última ecuación:

$$\frac{dP_t}{P_t} = \frac{d\left(\sum_{i=1}^{i=n} p_{it} q_{io}\right)}{\sum_{i=1}^{i=n} p_{it}\, q_{io}} \Rightarrow \log P_t = \log\left(\sum_{i=1}^{i=n} p_{it} q_{io}\right) + C_1$$

Donde C_1 es una constante arbitraria y cuyo valor puede ser obtenido mediante ciertas condiciones iniciales.

Se impone, como condición inicial, que:

$$Q_o = \exp\ (-C_1)$$

Donde exp = 2,7281 y Q_o es el volúmen total físico en el periodo "o".

Puesto que:

$$V_o = P_o Q_o = \sum_{i=1}^{i=n} p_{io} q_{io} \Rightarrow \frac{P_o}{\sum_{i=1}^{i=n} p_{io} q_{io}} = \frac{1}{Q_o} = \exp(C_1) = \frac{P_o}{\sum_{i=1}^{i=n} p_{io} q_{io}}$$

$$\Rightarrow C_1 = \log\left(\frac{P_o}{\sum_{i=1}^{i=n} p_{io} q_{io}}\right)$$

Reemplazando este valor en la relación anterior, se tiene:

$$\log P_t = \log\left(\sum_{i=1}^{i=n} p_{it}q_{io}\right) + \log\left(\frac{P_o}{\sum_{i=1}^{i=n} p_{io}q_{io}}\right) \Rightarrow \log P_t = \log\left(\sum_{i=1}^{i=n} p_{it}q_{io}\right)$$

$$+\log P_o - \log\left(\sum_{i=1}^{i=n} p_{io}q_{io}\right) \Rightarrow \log P_t - \log P_o = \log\left(\sum_{i=1}^{i=n} p_{it}q_{io}\right)$$

$$-\log\left(\sum_{i=1}^{i=n} p_{io}q_{io}\right) \Rightarrow \log\left(\frac{P_t}{P_o}\right) = \log\left[\frac{\sum_{i=1}^{i=n} p_{it}q_{io}}{\sum_{i=1}^{i=n} p_{io}q_{io}}\right]$$

Tomando antilogaritmo, en ambos miembros, se tiene:

$$\frac{P_t}{P_o} = \frac{\sum_{i=1}^{i=n} p_{it}q_{io}}{\sum_{i=1}^{i=n} p_{io}q_{io}}$$

Esta última expresión corresponde, como ya bien se sabe, a la definición del Índice de Laspeyres.

De la misma ecuación diferencial (II) :

$$\frac{dP_t}{P_t} = \frac{\sum_{i=1}^{i=n} q_{it}dp_{it}}{\sum_{i=1}^{i=n} p_{it}q_{it}}$$

Podemos obtener la correspondiente fórmula para el índice de precios de Paasche. Para ello se cambia el subíndice "t" por el subíndice "j":

$$\Rightarrow \frac{dP_j}{P_j} = \frac{\sum_{i=1}^{i=n} q_{ij} dp_{ij}}{\sum_{i=1}^{i=n} q_{ij} p_{ij}}$$

Suponga ahora, que las cantidades consumidas en el período comparado, son proporcionales a aquella consumidas en un período, digamos "t", es decir:

$$q_{ij} = kq_{it} \Rightarrow \frac{dP_j}{P_j} = \frac{\sum_{i=1}^{i=n} k\, q_{it}\, dp_{ij}}{\sum_{i=1}^{i=n} k\, q_{it}\, p_{ij}} = \frac{\sum_{i=1}^{i=n} q_{it}\, dp_{ij}}{\sum_{i=1}^{i=n} q_{it}\, p_{ij}}$$

Integrando ambos miembros, tenemos:

$$\frac{dP_j}{P_j} = \frac{d\left(\sum_{i=1}^{i=n} q_{it} p_{ij}\right)}{\sum_{i=1}^{i=n} q_{it} p_{ij}} \Rightarrow \log P_j = \log\left(\sum_{i=1}^{i=n} q_{it} p_{ij}\right) + C_2$$

Donde, al igual que en el caso anterior, C_2 es una constante arbitraria y cuyo valor puede ser obtenido mediante condiciones iniciales.

Supongamos que:

$$Q_t = \exp(-C_2) \text{ y que: } \exp(C_2) = \frac{P_t}{\sum_{i=1}^{i=n} p_{it} \quad q_{it}}$$

$$\Rightarrow \quad C_2 = \log \left[\frac{P_t}{\sum_{i=1}^{i=n} p_{it} q_{it}}\right] \log P_j = \log\left(\sum_{i=1}^{i=n} q_{it} p_{ij}\right)$$

$$+\log\left[\frac{P_t}{\sum_{i=1}^{i=n} p_{it} q_{it}}\right] \log P_j = \log\left(\sum_{i=1}^{i=n} q_{it} p_{ij}\right) + \log P_t - \log\left(\sum_{i=1}^{i=n} p_{it} q_{ij}\right)$$

$$\Rightarrow \log P_j - \log P_t = \log\left(\sum_{i=1}^{i=n} q_{it} p_{ij}\right) - \log\left(\sum_{i=1}^{i=n} p_{it} q_{it}\right) \Rightarrow \log \frac{P_j}{P_t}$$

$$= \log\left[\frac{\sum_{i=1}^{i=n} q_{it} p_{ij}}{\sum_{i=1}^{i=n} p_{it} q_{it}}\right]$$

Tomando algoritmo, se tiene:

$$\Rightarrow \frac{P_j}{P_t} = \frac{\sum_{i=1}^{i=n} q_{it}\, p_{ij}}{\sum_{i=1}^{i=n} p_{it}\, q_{it}}$$

Invirtiendo esta última relación, se tiene:

$$\Rightarrow \frac{P_j}{P_t} = \frac{\sum_{i=1}^{i=n} q_{it}\, p_{ij}}{\sum_{i=1}^{i=n} p_{ij}\, q_{it}}$$

Si ahora j = 0, se tiene:

$$\frac{P_t}{P_0} = \frac{\sum_{i=1}^{i=n} p_{it} q_{it}}{\sum_{i=1}^{i=n} p_{ij} q_{it}}$$

Expresión que corresponde a la fórmula de Índice de Precio de Paasche en el período “t” con base el período “o”.

Partiendo de nuestra ecuación inicial, es también fácil encontrar el Índice de Precios de Marschall-Edgeworth. Para ello, suponga que:

$$\begin{cases} \text{i)} & 0 \langle\, j \,\rangle\, t \\ \text{ii)} & q_{ij} = k_1 (q_{io} + q_{it}) \\ \text{iii)} & p_{ij} = k_2\, p_{it} \\ \text{iv)} & P_j = k_3\, P_t \end{cases}$$

Por lo tanto,

$$\frac{dP_j}{P_j} = \frac{\sum_{i=1}^{i=n} q_{ij} dp_{ij}}{\sum_{i=1}^{i=n} p_{ij} q_{ij}} = \frac{d(k_3 P_t)}{k_3 P_t} \Rightarrow \frac{\sum_{i=1}^{i=n} k_1 (q_{io} + q_{it}) k_2 (dp_{it})}{\sum_{i=1}^{i=n} k_1 (q_{io} + q_{it}) k_2 p_{it}}$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{i=n} (q_{i0} + q_{it}) dp_{it}}{\sum_{i=1}^{i=n} (q_{i0} + q_{it})} = \frac{d\left\{\sum_{i=1}^{i=n} (q_{i0} + q_{it}) p_{it}\right\}}{\sum_{i=1}^{i=n} p_{it} (q_{io} + p_{it})}$$

Integrando ambos miembros, se obtiene:

$$\log P_t = \log\left[\sum_{i=1}^{i=n} (q_{i0} + q_{it}) p_{it}\right] + C_3$$

Considerando como condición inicial:

$$C_3 = \log\left[\frac{P_0}{\sum_{i=1}^{i=n} p_{i0} (q_{i0} + q_{it})}\right]$$

Se tiene:

$$\log P_t = \log\left[\sum_{i=1}^{i=n} (q_{io} + q_{it}) p_{it}\right] + \log\left[\frac{P_0}{\sum_{i=1}^{i=n} p_{i0} (q_{i0} + q_{it}}\right]$$

$$\Rightarrow \log\left(\frac{P_t}{P_o}\right) = \log\left[\frac{\sum_{i=1}^{i=n} p_{it} (q_{io} + q_{it})}{\sum_{i=1}^{i=n} p_{io} (q_{io} + q_{it})}\right] \Rightarrow \frac{P_t}{P_0} = \frac{\sum_{i=1}^{i=n} p_{it} (q_{io} + q_{it})}{\sum_{i=1}^{i=n} p_{io} (q_{io} + q_{it})}$$

Fórmula que corresponde al Índice de Precios de Marshall-Edgeworth.

Igual argumentación puede utilizarse para encontrar la fórmula del índice de Precios de Keynes.

A continuación se encuentra, la fórmula del Índice de Precios de Fisher. Se parte de la misma ecuación inicial:

$$\frac{dP_t}{P_t} = \frac{\sum_{i=1}^{i=n} q_{it}\, dp_{it}}{\sum_{i=1}^{i=n} q_{it}\, p_{it}}$$

Particionando la sumatoria del numerador en el segundo miembro, en dos partes, de la siguiente manera:

$$\frac{dP_t}{P_t} = \frac{\sum_{i=1}^{i=n_1} q_{it}\, dp_{it} + \sum_{i=n_1+1}^{i=n} q_{it}\, dp_{it}}{\sum_{i=1}^{i=n} p_{it}\, q_{it}}$$

$$\frac{dP_t}{P_t} = \frac{\sum_{i=1}^{i=n_2} q_{it}\, dp_{it} + \sum_{j=1}^{j=n_2} q^*_{jt}\, dp^*_{jt}}{\sum_{i=1}^{i=n} p_{it}\, q_{it}}$$

Donde:

$$\begin{cases} q^*_{j,t} = q_{n1+i,t} \\ p^*_{j,t} = q_{n1+i,t} \\ j = i = 1,2,3\ldots \ldots n_2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{dP_t}{P_t} = \frac{\sum_{i=1}^{i=n_1} q_{it}\, dp_{it}}{\sum_{i=1}^{i=n} p_{it}\, q_{it}} + \frac{\sum_{j=1}^{i=n_2} q^*_{jt}\, dp^*_{jt}}{\sum_{i=1}^{i=n} p_{it}\, q_{it}}$$

$$\frac{dP_t}{P_t} = \frac{\sum_{i=1}^{i=n_1} q_{it}\, dp_{it}}{\sum_{i=1}^{i=n_1} q_{it}\, p_{it}} \text{ x } \frac{\sum_{j=1}^{i=n_2} q_{it}\, p_{jt}}{\sum_{i=1}^{i=n} p_{it}\, q_{it}} + \frac{\sum_{j=1}^{j=n_2} q^*_{jt}\, dp^*_{jt}}{\sum_{i=1}^{j=n_2} q^*_{jt}\, p^*_{jt}} \text{ x } \frac{\sum_{j=1}^{j=n_2} q^*_{jt}\, p^*_{jt}}{\sum_{i=1}^{i=n} p_{it}\, q_{it}}$$

$$\Rightarrow \frac{dP_t}{P_t} = \frac{\sum_{i=1}^{i=n_1} q_{it} dp_{it}}{\sum_{i=1}^{i=n_1} q_{it} p_{it}} \; a_1 \frac{\sum_{j=1}^{j=n_2} q^*_{jt}\, dp^*_{jt}}{\sum_{j=1}^{j=n_2} q^*_{jt}\, p^*_{jt}}$$

En que:

$$a_1 = \frac{\sum_{i=1}^{i=n_1} q_{it}\, p_{it}}{\sum_{i=1}^{i=n} q_{it}\, p_{it}} \quad \text{y} \quad a_2 = \frac{\sum_{j=1}^{j=n_2} q^*_{jt}\, p^*_{jt}}{\sum_{i=1}^{i=n} q_{it}\, p_{it}} \quad \text{Y además: } \sum_{k=1}^{k=2} a_k = 1$$

Sean:

$$\frac{dP_1}{P_1} = \frac{\sum_{i=1}^{i=n_1} q_{it}\, dp_{it}}{\sum_{i=1}^{i=n_1} q_{it}\, p_{it}} \qquad (1)$$

$$\frac{dp_2}{P_2} = \frac{\sum_{j=1}^{j=n_2} q*_{jt}\, dp*_{jt}}{\sum_{j=1}^{j=n_2} q*_{jt}\, p*_{jt}} \qquad (2)$$

$$\Rightarrow \frac{dP_t}{P_t} = \frac{dP_1}{P_1} a_1 + \frac{dP_2}{P_2} a_2$$

Si en la ecuación (1) se hace $q_{it} = k\, q_{io}$, se tiene:

$$\frac{dP_1}{P_1} = \frac{\sum_{i=1}^{i=n_1} q_{io}\, dp_{it}}{\sum_{i=1}^{i=n_1} q_{io}\, p_{it}}$$

Integrando, se obtiene:

$$\log P_1 = \log\left(\sum_{i=1}^{i=n_1} q_{io}\, p_{it}\right) + C_1$$

Donde C_1 es una constante arbitraria.

De la ecuación (2), se obtiene:

$$\frac{dP_2}{P_2} = \frac{\sum_{j=1}^{j=n_2} q*_{jt}\ p*_{jt}}{\sum_{j=1}^{j=n_2} q*_{jt}\ p*_{jt}}$$

$$\Rightarrow \ \log P_2 = \ (\sum_{j=1}^{j=n_2} q*_{jt}\ p*_{jt}) + C_2$$

Sumando las ecuaciones (3) y (4), se tiene:

$$\log P_1 + \log P_2 = \log(\sum_{i=1}^{i=n_1} p_{it}\ q_{i0}) + \log(\sum_{j=1}^{j=n_2} q*_{jt}\ p*_{jt}) + C_3$$

En que $C_3 = C_1 + C_2$

$$\Rightarrow \log(P_1 \text{ x } P_2) = \log\left\{ \ (\sum_{i=1}^{i=n_1} p_{it}\ q_{io})\,\text{x}.(\sum_{j=1}^{j=n_2} p_{jt}\ q*_{jt}) \ \right\} + C_3 \qquad (5)$$

Pero sabemos que:

$$\frac{dP_t}{P_t} = \ \frac{dP_1}{P_1}\ a_1 + \frac{dP_2}{P_2}\ a_2 \quad \text{y además:} \sum_{k=1}^{k=2} a_k = 1$$

Se tiene $\quad a_1 = a_2 = 1/2$

$$\Rightarrow \ \frac{dP_t}{P_t} = \frac{1}{2}(\frac{dP_1}{P_t} + \frac{dP_2}{P_2})$$

Integrando miembro a miembro, se obtiene:

$$\log\ P_t = \frac{1}{2}\ \log\left\{(\sum_{i=1}^{i=n_1} p_{it}q_{io})\ (\sum_{j=1}^{j=n_2} p*_{jt}\ q*_{jt})\right\} + C$$

donde $C = C_3 + C_4$

$$\log P_t = \log\left[(\sum_{ii=1}^{i=n_1} p_{it}q_{io})\ (\sum_{j=1}^{j=n_2} p*_{jt}\ q*_{jt})\right]^{1/2} + C \qquad (7)$$

Si los precios en el período base "o" son p_{io} y el nivel de precios es P_o, entonces:

$$\log P_o = \log\left[(\sum_{i=1}^{i=n_1} p_{io}q_{io})\ (\sum_{j=1}^{j=n_2} p*_{jo}\ q*_{jt})\right]^{1/2} + C$$

$$\Rightarrow\ C = \log\frac{P_o}{\left[(\sum_{i=1}^{i=n_1} p_{io}q_{io})\ (\sum_{j=1}^{j=n_2} p*_{jo}\ q*_{jt})\right]^{1/2}}$$

Reemplazando el valor de C en la ecuación (7) :

$$\log P_t = \log\left[(\sum_{i=1}^{i=n_1} p_{it}q_{io})\ (\sum_{j=1}^{j=n_2} p*_{jt}\ q*_{jt})\right]^{1/2} + \log\frac{P_o}{\left[(\sum_{i=1}^{i=n_1} p_{io}q_{io})\ x\ (\sum_{j=1}^{j=n_2} p*_{jo}\ q*_{jt})\right]^{1/2}}$$

$$\log(\frac{P_t}{P_o}) = \log\left[\left(\frac{\sum_{i=1}^{i=n_1} p_{it}q_{io}}{\sum_{i=1}^{i=n_1} p_{io}q_{io}}\right)\left(\frac{\sum_{j=1}^{j=n_2} p*_{jt}\ q*_{jt}}{\sum_{j=1}^{j=n_2} p*_{jo}\ q*_{jt}}\right)\right]^{1/2}$$

Al tomar antilogaritmo, se obtiene:

$$\frac{P_t}{P_o} = \left[\left(\frac{\sum_{i=1}^{i=n_1} p_{it} q_{io}}{\sum_{i=1}^{i=n_1} p_{io} q_{io}} \right) \left(\frac{\sum_{j=1}^{j=n_2} p^*_{jt} \, q^*_{jt}}{\sum_{j=1}^{j=n_2} p^*_{jo} \, q^*_{jt}} \right) \right]^{\frac{1}{2}}$$

Fórmula que corresponde al Índice de Precios de Fisher en el periodo "t" con base el periodo "o".

Si en cambio se utiliza la ecuación diferencial (I) de la segunda página de este artículo, y para los precios se consideran supuestos análogos a los establecidos para las cantidades, se puede obtener de manera semejante los correspondientes índices de cantidades de Laspeyres, Pasee, Fisher, Marshall, Edgeworth y Keynes.

1 Bibliografía

Banerjee, Kali S.(1975): **Cost of Living Index Numbers**. New York.Marcel Dekker, Inc.

Davis, H.T.(1947): **The Theory of Econometrics.** Bloomington, Indiana. Principia Press.

Divisia, F.(1926): "L'indice Monetaire et les Theories de la Monnaie" **Rev. Econo. Politique**, 39, 842-861, 980-1008, 1121-1151 pp (1925); 40, 49-87 pp (1926).

________(1927): "Economique Rationnelle". **Rev. Econo. Politique,** 367-433, 443 pp.