Economía, XXXVI, 32 (julio-diciembre, 2011), pp. 139-167
ISSN 1315-2467, Depósito legal pp: 198702me336

Caracterización de las variables de una matriz de contabilidad social mediante la teoría de la pretopología

Characterization of social accounting matrix variables using pretopology theory

José Contreras[*], Nora Guarata[**] y Arturo Reyes[***]

Códigos JEL: C02, C67, C81

Recibido: 03/11/2011, Revisado: 27/01/2012, Aceptado: 30/01/2012

Resumen

Este trabajo tiene como objetivo introducir conceptos pretopológicos para caracterizar y ordenar las variables endógenas de las Matrices de Contabilidad Social (MCS). Los espacios pretopológicos son estructuras matemáticas que dan la posibilidad de establecer una jerarquización entre los diferentes elementos de un conjunto, una vez que se han establecido las relaciones binarias de influencia entre sus elementos. A través de definiciones y propiedades de conceptos tales como clausuras, preclausuras, conjuntos cerrados minimales, y su ilustración con ejemplos, se articula un marco general que permite la caracterización de relaciones existentes en una MCS. Se presenta la matriz de relaciones correspondiente, el cuadro de clausuras y preclausuras así como los diagramas resultantes de esas relaciones.

Palabras clave: Pretopología, matriz de contabilidad social, jerarquización.

Abstract

In this paper, we introduced the pretopological approach to characterize and rank endogenous variables from a Social Accounting Matrix (SAM). Pretopological spaces are mathematical structures that enable the possibility to establish a ranking among elements of a set, once we lay down the binary relationships of influence among elements. Through

* Investigador Senior de Economía, Oficina de Investigaciones Económicas, Banco Central de Venezuela. Avenida Urdaneta, esquina Las Carmelitas, Apartado postal 2017. Caracas, 1010. Correo electrónico: joscontr@bcv.org.ve.

** Investigador Senior de Economía, Oficina de Investigaciones Económicas, Banco Central de Venezuela. Avenida Urdaneta, esquina Las Carmelitas, Apartado postal 2017. Caracas, 1010. Correo electrónico: nguarata@bcv.org.ve.

*** Profesor jubilado Facultad de Ciencias, Escuela de Matemática. Universidad Central de Venezuela. Avenida Los Ilustres, Los Chaguaramos, Apartado postal, 20513. Caracas 1020. Correo electrónico: reyesarturoleon@gmail.com.

definitions such as closure, pseudoclusure, minimal closed subsets and examples, we set a framework that allows the characterization of the relations among the elements of a SAM. We present a matrix with the corresponding relationships, a table with closure and pseudoclusure, along with the corresponding diagrams.

Key words: Pretopology, social account matrix, hierarchy.

1. Introducción

El presente trabajo tiene como objetivo introducir el enfoque pretopológico con el propósito de caracterizar y ordenar las variables endógenas de una Matriz de Contabilidad Social (MCS).

Los espacios pretopológicos son estructuras matemáticas que ofrecen la posibilidad de establecer una jerarquización entre los diferentes elementos de un conjunto, una vez que se han definido las relaciones binarias de influencia entre sus elementos. Al definir una relación de influencia (por ejemplo: la influencia relativa de la cuenta *i* sobre la cuenta *j* se define como el incremento relativo de la cuenta *j* cuando se produce un aumento relativo en la cuenta *i*), es posible caracterizar los impactos que resultan de aplicar una política pública en función de diferentes criterios que apuntan al logro de diferentes objetivos económicos preestablecidos. Por lo tanto, a partir de las estructuras pretopológicas definidas en las cuentas de las MCS se construye una metodología que permite caracterizar, según una relación de influencia predefinida, la secuencia en que las actividades son estimuladas como resultado del impacto de una política pública.

Este trabajo se encuentra organizado de la siguiente manera: la segunda sección explica las condiciones de cierre o clausura de conjuntos, así como también la construcción de espacios pretopológicos, sus teoremas y condiciones de existencia. Seguidamente, en la tercera parte, se definen los operadores de preclausura y las relaciones que se dan en dichos espacios para determinar los conjuntos cerrados minimales. Luego, en esta misma sección, se analizan varios ejemplos con matrices de Contabilidad Social (MCS) de la economía venezolana para caracterizar las relaciones más importantes de las variables económicas, tanto desde el punto de vista de las estructuras de costo, como de los multiplicadores.

Para el logro de este objetivo se hace uso de un software desarrollado para encontrar los conjuntos cerrados minimales. Y, finalmente, en la cuarta parte se presentan las conclusiones.

2. Preclausuras y espacios pretopológicos

Sea E un conjunto $\mathcal{P}(E)$ la familia de los subconjuntos de E, donde, $A \in \mathcal{P}(E)$ significa que A es un subconjunto de E, es decir, $A \subseteq E$. En $\mathcal{P}(E)$ se tiene un orden parcial, llamado *orden de inclusión*. En efecto, si A y B son subconjuntos de E, se dice que $A \leq B$ (A es *menor o igual* a B) si A es un subconjunto de B, o que A está contenido en B.

2.1. Preclausura

Un operador de *preclausura* en un conjunto E, es una función $c:\mathcal{P}(E) \rightarrow \mathcal{P}(E)$ tal que:

(*i*) $c(\emptyset)= \emptyset$

(*ii*) $A \subseteq c(A)$, 0 para cada conjunto $A \subseteq E$

De esta definición se deduce que $c(E)= E$ para el conjunto total E. Esto se verifica puesto que $E \subseteq c(E)$. El conjunto c(A) se llama la preclausura del conjunto A.

Ejemplo 2.1.

Si E es el conjunto de los números naturales y para $A \subseteq E$, se define c(A) como el conjunto de los números naturales que son múltiplos de algún elemento de A, entonces resulta que c es un operador de preclausura en E. Más aún, la preclausura del conjunto {1} es el conjunto total E: todo número natural es múltiplo de 1.

2.2. Operador de preclausura isótono

Sea c un operador de preclausura en un conjunto E. Se dice que c es *isótono* si y solo si c preserva el orden de inclusión de $\mathcal{P}(E)$, es decir, si A y B son subconjuntos de E tales que $A \subseteq B$, entonces $c(A) \subseteq c(B)$. Análogamente, c es *aditivo* si y solo sí cuando A y B son subconjuntos de E, entonces $c(A \cup B)= c(A) \cup c(B)$.

Si A y B son subconjuntos de E tales que $A \subseteq B$, entonces, usando la igualdad $B= A\cup(B-A)$, se deduce que todo operador de preclausura aditivo es también isótono. En el ejemplo 2.1 el operador allí definido es un operador aditivo y por lo tanto es isótono. A continuación un ejemplo de un operador isótono que no es aditivo.

Ejemplo 2.2.
Sea E un conjunto finito que tiene $n\geq 3$ elementos. Para $A \subseteq E$, sea $c(A)= A$, si A tiene menos de n-1 elementos, y $c(A)= E$ si el número de elementos de A es mayor o igual a n-1.
Obsérvese que c es isótono: Sean A y B subconjuntos de E tales que $A\subseteq B$. Entonces, si el número de elementos de A es mayor o igual a n-1, igual para con B, se tiene como consecuencia que $c(A)= c(B)=E$. Si A tiene menos de n-1 elementos, entonces $c(A)= A \subseteq B \subseteq c(B)$.
Más aún, c NO es aditivo: Sea un conjunto que tiene n-1 elementos y sean A_1 y A_2 dos subconjuntos de A no vacíos y disjuntos y con $A= A_1\cup A_2$, entonces $c(A)= E$ porque A tiene n-1 elementos. Por otro lado, las condiciones sobre A_1 y A_2 implican que cada uno de ellos tienen un número de elementos menor que n-1 y en consecuencia $c(A_1)=A_1$ y $c(A_2)=A_2$. Así que $E = c(A) = c(A_1\cup A_2) \neq c(A_1) \cup c(A_2) = A_1\cup A_2 = A$. Recuérdese que A tiene n-1 elementos y E tiene $A \neq E$.

2.3. Espacio pretopológico

Un espacio pretopológico es un par ordenado (E, c), donde E es un conjunto y c es un operador de preclausura en E. El nombre de *pretopológico* se debe a que el concepto de *espacio topológico* corresponde a un par (E, c), donde E es un conjunto y c es un operador de *clausura* en E, lo que significa que c es un operador de preclausura en E que verifica las dos condiciones adicionales siguientes: c es idempotente, o sea $c^2=c$ y además es aditivo, como es el caso del ejemplo 2.1.

2.4. V-espacio

Un espacio pretopológico (E, c) es un V-espacio si y solo si c es un operador isótono.

2.5. Conjunto c-cerrado

Sea (E, c) un espacio pretopológico. Un conjunto $A \subseteq E$ es un conjunto *c-cerrado* si y solo si c(A)= A. Así por ejemplo los conjuntos $\emptyset$ y E son conjuntos c-cerrados. Cuando no haya lugar a confusión respecto al operador de preclausura c, se dice simplemente que $A \subseteq E$ es un conjunto cerrado para indicar que es un conjunto c-cerrado.

Ejemplo 2.3.

Sea E el conjunto formado por los profesores y los alumnos de alguna universidad, en la cual puede haber profesores que son simultáneamente alumnos y profesores. Para cada conjunto $A \subseteq E$, sea c(A) la reunión de A con el conjunto de aquellos elementos de E que son alumnos de algún profesor de A. Es claro que con esta definición, c es un operador de preclausura en E. Más aún si $p \subseteq E$ es un profesor, entonces c({p}) es el subconjunto de E formado por p y sus alumnos. Si p_0 es un profesor cuyos alumnos son únicamente estudiantes, entonces $c(\{p_0\})$ es un conjunto cerrado, puesto que se verifica que $c(c(\{p_0\})) = c(\{p_0\})$.

2.6. n-ésima preclausura

Sea (E, c) un espacio pretopológico si $A \subseteq E$, c(A) es la clausura de A y c(c(A)) es la clausura de c(A), llamada también la *segunda preclausura* de A y denotada por $c^2(A)$. Análogamente se tiene la tercera preclausura de A, $c^3(A)= c^2(c(A))= c(c^2(A))$. En general para un entero positivo n, c^n (A) es la n-ésima preclausura de A, que se obtiene iterando c n veces, es decir, c^n es la composición c.c.c…c, -n-veces. Para completar definimos $c^0(A)= A$ para $A \subseteq E$, es decir, $c^0 = I$ es el operador identidad de $\mathcal{P}(E)$, caracterizado por ser el único operador de preclausura tal que cada conjunto $A \subseteq E$ es un conjunto cerrado.

Ejemplo 2.4.

Sea E el conjunto de los números naturales x, tales que, $1 \leq x \leq 100$. Definimos $c:\mathcal{P}(E)\rightarrow\mathcal{P}(E)$ de la siguiente manera:

(*i*) $c(\emptyset)= \emptyset$

(*ii*) Si $A \subseteq E$ y $A \neq$, sea *k*(A) el número de elementos de A. Entonces *k*(A) $\subseteq$ E Por lo tanto $\{k(A)\} \cup A \subseteq E$. Defínase, $c(A)= A \cup \{k(A)\}$ si $A \neq \emptyset$.

Claramente c es un operador de preclausura en E.

El conjunto $\{1\}$ es c-cerrado ya que $c(\{1\})=\{1\}$, y el conjunto $\{1,2,3\}$ también lo es. En general, un conjunto $A\neq\emptyset$ es c-cerrado si y solo si $k(A) \subseteq E$. Por otro lado, el conjunto $\{3,4\}$ no es cerrado, pero sí lo es su preclausura

$c(\{3,4\})=\{2,3,4\}$ y $c(\{2,3,4\})=\{2,3,4\}$

Por último si $D=\{4,5\}$, $c(D)= \{2,4,5\}$, entonces $c^2(D)= c(c(D))= c(\{2,4,5\})=\{2,3,4,5\}$ y $c^3 (D)= c^2 (D)$ lo que implica que $c^2(D)$ es un conjunto cerrado. Debe destacarse que c *NO* es isótono. En efecto, si $A= \{1,4\}$ y $B=\{1,4,5\}$, entonces $c(A)= \{1,2,4\}$, $c(B) = \{1,3,4,5\}$, $A \subseteq B$, pero $c(A)$ *NO* está contenido en $c(B)$. El siguiente resultado permite relacionar los conjuntos cerrados y la iteración del operador de preclausura c en un espacio pretopológico (E, c) donde E es un conjunto finito.

Teorema 2.1.

Sea E un conjunto finito y c un operador de preclausura en E: entonces para cada subconjunto A de E, existe un entero positivo i tal que $c^i(A)$ es un conjunto cerrado (ver anexo). La demostración de este teorema es consecuencia del siguiente resultado de la teoría de conjuntos finitos parcialmente ordenados.

Teorema 2.2.

Sea H un conjunto finito parcialmente ordenado. Entonces cada sucesión monótona $\{x_n\}$ de elementos de H es eventualmente constante, es decir, existe un entero positivo n_0 tal que para cada $n \geq n_0$, $x_n = x_{n_0}$ (ver anexo). Volviendo al teorema 2.1., se tiene que $\mathcal{P}(E)$ es un conjunto finito parcialmente ordenado por la relación de inclusión. Considérese un conjunto A en $\mathcal{P}(E)$ y sea $\{A_n, n \geq 1\}$ la sucesión tal que $A_n= c^n(A)$. Esta sucesión es monótona creciente ya que para cada $n \geq 1$, $c^n(A) \subseteq c(c^n(A)= c^{n+1}(A)$. Por el resultado anterior existe un entero $i \geq 0$ tal que $c^i(A)= c^{i+1}(A)$, y así $c^i(A)$ es un conjunto cerrado.

2.7. Clausura

En el siguiente teorema se introduce el concepto de *clausura* en un espacio pretopológico y se establece una condición necesaria y suficiente sobre los conjuntos cerrados para garantizar la existencia de la clausura.

Teorema 2.3.

En un espacio pretopológico (E, c) las siguientes condiciones son equivalentes:

(*i*) La intersección de cualquier familia de conjuntos cerrados en E es un conjunto cerrado en E.

(*ii*) Para cada conjunto $A \subseteq E$ existe un único conjunto cerrado F(A) que contiene A y está contenido en cada conjunto cerrado que contiene A. El conjunto F(A) se llama la *clausura* del conjunto A (ver anexo). El siguiente teorema muestra una clase de espacios pretopológicos en los cuales existe la clausura.

Teorema 2.4.

En cada V-espacio pretopológico (E, c) la intersección de cualquier familia de conjuntos cerrados en E es un conjunto cerrado en E (ver anexo).

2.8. Contraejemplo

Considérese nuevamente el ejemplo 2.4 en el cual E es el conjunto de los números naturales que van del 1 al 100. Si $A \subseteq E$ y $A \subseteq \emptyset$, $c(A)= A \cup \{k(A)\}$, donde k(A) es el número de elementos de A.

Sea $A= \{3,5\}$, $D= \{3,4,5\}$ y $G= \{2,3,5\}$. Entonces, D y G son conjuntos cerrados tales que su intersección $D \cap G= A$ *NO* es un conjunto cerrado. Por otro lado si se tuviese definido F(A), la clausura de A, entonces se tendría que $F(A) \subseteq D \cap G= A$, y en consecuencia A sería cerrado.[1]

Teorema 2.5.

Sea (E, c) un V-espacio pretopológico y $A \subseteq E$. Si existe un entero $n \geq 0$ tal que $c^n(A)$ es un conjunto cerrado, entonces $c^n(A)$ es la clausura F(A) del conjunto A[2] (ver anexo).

2.9. Conjuntos cerrados minimales y conjuntos cerrados elementales

Sea (E, c) un espacio pretopológico, un conjunto cerrado $A \subseteq E$ es *minimal* si y solo si el único subconjunto cerrado contenido en A que no es vacío es el mismo A; es decir, si $B \subseteq A$ es un conjunto cerrado y $B \neq \emptyset$, entonces $B = A$.

En un espacio pretopológico (E, c) donde está definida la clausura de cada subconjunto de E, un conjunto $D \subseteq E$ es un conjunto *cerrado elemental* si y solo si D es la clausura de un conjunto unitario $\{z\}$ con $z \in E$. De aquí en adelante, abusando un poco de la notación, se denota con $F(z)$ a la clausura del conjunto unitario $\{z\}$ para cada $z \in E$. En este caso resulta que cada conjunto cerrado minimal es elemental: Si $A \subseteq E$ es un conjunto cerrado minimal y $z \in A$, entonces $\{z\} \subseteq A$. Para las clausuras se tiene que $F(z) \subseteq F(A)$ y siendo A minimal, dado que $F(z)$ es cerrado y no vacío y que $z \in F(z)$ se deduce que $F(z) = A$.

Ejemplo 2.5.
Sea N el conjunto de los números naturales y para $A \subseteq N$, c(A) es el conjunto de los elementos de N que son múltiplos de algún elemento de A. Entonces c es un operador de preclausura en N que es aditivo e idempotente, $c^2 = c$. De aquí se deduce que para cada $A \subseteq N$, c(A) es la clausura de A: si p y q son elementos de N, la inclusión $c(\{p.q\}) \subseteq c(\{p\})$ implica que no hay conjuntos cerrados minimales.

Ejemplo 2.6.
Sea E un conjunto de personas que pueden eventualmente tener un parentesco familiar: Para $A \subseteq E$, sea c(A) la reunión de A con el conjunto de personas en E que son ascendientes de alguna persona de A. Entonces c es claramente isótona, y por lo tanto se tiene definida la clausura F(A) de cada conjunto $A \subseteq E$. Se puede probar que en este caso los únicos conjuntos cerrados minimales están dados para los conjuntos de la forma $c(\{z\})$ donde $z \in E$ es cabeza de familia, es decir, z no tienen ascendientes, y así $c(\{z\})=\{z\}=F(z)$.

Más adelante y al final de la sección 3 se considerarán otros ejemplos donde determinan los conjuntos cerrados minimales y los cerrados elementales. Por ahora conviene estudiar el caso del ejemplo 2.4., donde E es el conjunto de los números naturales x tales que $1 \leq x \leq 100$, y si $A \subseteq E$, $A \neq \emptyset$, $c(A) = A \cup \{k(A)\}$, donde k(A) es el número de elementos de A. A continuación caracterizan los subconjuntos cerrados minimales.

Teorema 2.6.
Sea (E, c) el espacio pretopológico antes mencionado. Entonces un conjunto $A \subseteq E$ es un conjunto cerrado minimal si y solo si k(A) coincide con el menor elemento de A (ver anexo).

Ejemplo 2.7.
Sea E el conjunto de los comerciantes de alguna localidad que se relacionan entre sí mediante la relación de compra-venta. Para $A \subseteq E$ sea c(A) la reunión de A con el conjunto formado por aquellos comerciantes de E que le compran a algún miembro de A. Entonces, si $z_0 \in E$, $c(\{z_0\})$ es el conjunto formado por z_0 y aquellos comerciantes de E que le compran a z_0. Así resulta que la igualdad $c(\{z_0\})=\{z_0\}$ significa que z_0 *NO* vende, es decir, z_0 *NO* tiene compradores y en este caso $c(\{z_0\})=\{z_0\}$ es un cerrado minimal.

Considérese ahora el caso más general en que $c(\{z_0\})$ es una especie de club en el cual cada x, elemento de $c(\{z_0\})$, le vende *únicamente* a los comerciantes que están en $c(\{z_0\})$. Esto significa por un lado que $(\{z_0\})$ es un conjunto cerrado, y como además en este ejemplo (E, c) es un V-espacio, el teorema 2.5. implica que $c(\{z_0\})$ es la clausura de $(\{z_0\})$. Por otro lado, que cada $x \in c(\{z_0\})$ le vende únicamente a todos los comerciantes que están en $c(\{z_0\})$ significa que $c(\{x\}= c(\{z_0\})$ para cada $x \in c(\{z_0\})$. En consecuencia, $c(\{z_0\})$ es un conjunto cerrado minimal.

3. Relaciones y preclausuras

Sea E un conjunto y E x E el producto cartesiano de E por E. Cada elemento de E x E es un par ordenado (x, y) donde x e y son elementos de E, llamados respectivamente la *primera* y *segunda coordenada* del par ordenado (x, y).

3.1. Relación
Una relación en un conjunto E es un subconjunto del producto E x E. Así se tiene por ejemplo la relación $\Delta \subseteq E \times E$, llamada la relación de igualdad en E y que está dada por los pares (x,y) de E x E tales que x=y.

$\Delta = \{(x,y) \in E \times E: x = y\}$

Si $R \subseteq E \times E$ es una relación en E, se usará la notación xRy para significar que el par (x,y) es un elemento de R.

xRy si y solo si $(x,y) \in R$

La notación xRy se lee "x está relacionado con y según la relación R".

3.2. Tipos de relaciones

Una relación R en un conjunto E es *reflexiva* si y solo si para cada $x \in E$, xRx. Esto es equivalente a que R contiene a la relación Δ, la relación de igualdad. Asimismo se dice que R es *simétrica* si y solo si $(x, y) \in R$, entonces $(y,x) \in R$, es decir, si xRy implica yRx.

Finalmente se dice que R es *transitiva* si y solo si (x, y) e (y, z) son elementos de R, entonces (x, z) es un elemento de R: xRy e yRz implica xRz. Así por ejemplo la relación R definida en el conjunto de los números naturales por la condición: xRy si y solo si *x es múltiplo de y* es una relación reflexiva y transitiva pero no es simétrica. La relación R padre-hijo: xRy si y solo si *x es padre de y* es una relación en el conjunto de los seres humanos que no es reflexiva, ni simétrica, ni transitiva.

3.3. Conjunto imagen

Sea R una relación en un conjunto E y $A \subseteq E$. La *imagen* de A por R, denotada por R(A) es el subconjunto de E definido así:

$R(A) = \{y \in E: xRy \text{ para algún } x \in A\}$

Si z es un elemento de E, se pondrá $R(z)$ en lugar de $R(\{z\})$.

$R(\{z\}) = \{y \in E: zRy\}$

La *imagen inversa* del conjunto A según R, es el subconjunto de E definido así:

$R^{-1}(A) = \{x \in E: xRy \text{ para algún } y \in A\}$

Así mismo se denota para $z \in E$, $R^{-1}(z)$ al conjunto $R^{-1}(\{z\})$:

$R^{-1}(z) = \{x \in E: xRz\}$

Por ejemplo en la relación antes definida en el conjunto de los números naturales: xRy si y solo si *x es múltiplo de y*, $R^{-1}(z)$ es el conjunto de los múltiplos de z. Obsérvese que la definición de $R^{-1}(A)$ permite escribir $R^{-1}(A) = \{x \in E: R(x) \cap A \neq \emptyset\}$. Más aún, $R^{-1}(A) = \cup \{R^{-1}(x): x \in A\}$.

3.4. Preclausura inducida por una relación

Sea R una relación en un conjunto E y sea la función de $\mathcal{P}(E)$ en $\mathcal{P}(E)$ definida para $A \subseteq E$, por $c_R(A) = A \cup R^{-1}(A)$. Es claro que c_R es un operador de preclausura en E y se llama la *preclausura inducida por la relación R en E*. El operador c_R es aditivo, puesto que si A y B son subconjuntos de E, $R^{-1}(A \cup B) = R^{-1}(A) \cup R^{-1}(B)$. Si la relación R es reflexiva entonces $A \subseteq R^{-1}(A)$ y recíprocamente. En este caso $c_R(A) = R^{-1}(A)$. En el caso de $A=\{z\}$ para $z \in E$, se tiene que $c_R(\{z\}) = \{z\} \cup R^{-1}(z) = \{z\} \cup \{x \in E : xRz\}$. Se tiene además el siguiente resultado interesante.

Teorema 3.1.

Sea R una relación definida en un conjunto E y sea c_R el operador de preclausura inducido por R. Entonces R es transitiva si y solo si c_R es idempotente: $c_R^2 = c_R$ (ver anexo).

Ejemplo 3.1.

Sea E un conjunto en el cual hay un *criterio de influencia* entre los elementos de E. Entonces se puede definir una relación R de influencia en E, estableciendo que un par ordenado $(x,y) \in R$ si y solo si *x es influenciado por y* según el criterio de influencia previamente establecido.

Entonces, para un elemento $z \in E$, $c_R(\{z\})$ es el conjunto de los elementos de E que son influenciados por *z*, incluyendo a *z*. Se podría llamar a $c_R(\{z\})$ la *zona de influencia* de *z*, y establecer así mismo que un conjunto $A \subseteq E$ es *autoinfluenciable* si y solo si A contiene la zona de influencia de cada una de sus elementos. Esto significa exactamente que A es un conjunto c_R – cerrado.

A continuación se expone un teorema para caracterizar los conjuntos cerrados y los cerrados minimales en una clase de espacios pretopológicos que incluye a aquellos en los cuales el operador de preclausura es inducido para una relación. Recuérdese antes que entre los resultados establecidos para el operador de preclausura c_R inducido por una relación R en un conjunto E, están que c_R es aditivo y por lo tanto isótona y, más aún, si $A \subseteq E$, $c_R(A) = \cup\{c_R(x) : x \in A\}$. Si se define que un operador de preclausura c en un conjunto E es *completamente aditivo* si y solo si para cada $A \subseteq E$, $c(A) = \cup\{c(x) : x \in A\}$, entonces cada c_R verifica esta propiedad.

Teorema 3.2.

En un espacio pretopológico (E, c) se tienen los siguientes resultados:

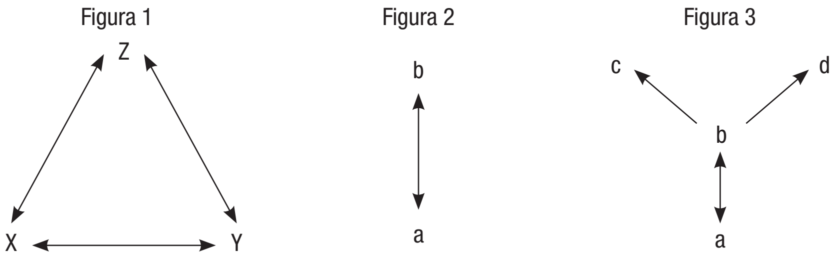
(*i*) Si c es completamente aditivo, entonces un conjunto $A \subseteq E$ es cerrado si y solo si para cada $x \in A$, $c(\{x\}) \subseteq A$

(*ii*) Si c es isótona, entonces un conjunto $A \subseteq E$ es un cerrado minimal si y solo si para cada $x \in A$ la clausura $F(x)$ de $\{x\}$ coincide con A, es decir, $F(x)= A$.

Usando este teorema, en la sección 3.4. se explica una técnica para obtener los conjuntos cerrados.

Ejemplo 3.2.

En el siguiente grafo se define la relación de influencia R así: xRy si y solo si hay una flecha desde y hacia x. La notación $u \leftrightarrow v$ significa que hay una flecha de u hacia v y otra de v hacia u.



Fuente: Elaboración propia

Los conjuntos A= {x,y,z} de la figura 1 y B= {a,b} de la figura 2, son conjuntos cerrados minimales. El conjunto D= {a,b,c,d} de la figura 3 es un conjunto cerrado que no es minimal.

3.5. Detectando los conjuntos cerrados

Sea E un conjunto finito, R una relación en E y $c= c_R$ el operador de preclausura inducido por R en E. La siguiente técnica permite calcular los conjuntos cerrados minimales en el espacio pretopológico (E, c). Se comienza con que siendo E un conjunto finito, los teoremas 2.1. y 2.5. implican que para cada $A \subseteq E$ existe un entero $i \geq 0$ tal que $c^i(A)$ es un conjunto cerrado y, además, la clausura F(A) de A coincide con

$c^i(A)$. Como los conjuntos cerrados minimales son elementales, se debe calcular entonces la clausura F(x) del conjunto {x} para cada x ∈ E. Por otra parte, se sabe que si A ⊆ E, entonces c(A) es la reunión de los conjuntos c({x}) cuando x varía en A puesto que c_R es completamente aditiva (ver ejemplo 3.1). Se trata entonces de calcular los conjuntos c^i ({x}) para cada x ∈ E, hasta obtener el menor entero positivo n tal que sea cerrado, y así F(x)= c^n ({x}).

A continuación se muestran varios ejemplos. Para efectos prácticos, es posible dibujar una relación en el plano cartesiano E x E. Entonces, las preclausuras pueden ser construidas de la forma {z {U} x, y, …} donde, para cada z en la fila se toman los componentes de la recta horizontal, o de la forma {x, y, …} U {z} y, para cada z en la columna se toma los componentes de la recta vertical.

Ejemplo 3.3. (por fila)

Sea E= {1,2,3,4,5,6,7,8} y R la relación definida así: 1R1, 1R7, 1R8, 2R2, 2R3, 3R3, 3R4, 4R4, 5R2, 5R4, 5R5, 6R5, 6R6, 7R1, 7R7, 8R8. En la figura 4 se grafica en el producto E x E la relación R, el eje horizontal $\vec{X}$, es el eje de las primeras coordenadas, y el eje vertical $\vec{Y}$ es el de las segundas coordenadas.

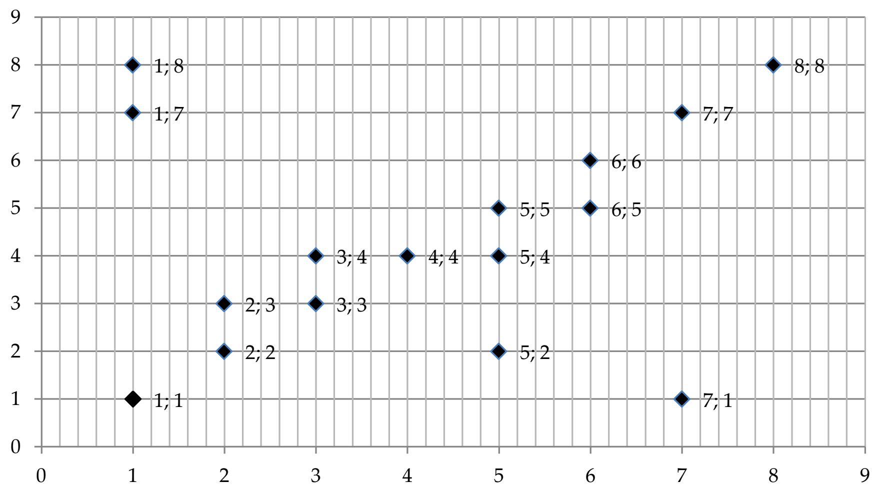


Figura 4. Fuente: Cálculos propios

El conjunto de puntos representa a R. Para calcular $R^{-1}(n)$ se localiza n en el eje vertical $\vec{y}$, luego se toma la semi recta horizontal que pasa por n y se proyecta sobre el eje $\vec{x}$. El conjunto de puntos obtenidos de la proyección sobre $\vec{x}$ es $R^{-1}(n)$. Como $c(\{n\})= \{n\} \cup R^{-1}(n)$, entonces se ha calculado $c(\{n\})$ para cada $n \in E$. Se itera luego para calcular $c^2(\{n\})$ a partir de los $c(\{x\})$ variando x en $c(\{n\})$. Así por ejemplo si $c(\{n\})= \{x_1,x_2,x_3\}$, entonces se sabe que $c^2(\{n\})= c(\{x_1\}) \cup c(\{x_2\}) \cup c(\{x_3\})$ y esta reunión se obtiene a partir de los $c(\{x_i\})$ ya calculados. El cuadro 1 ilustra la situación.

Cuadro 1. Relaciones

x	$c(\{x\})$	$c^2(\{x\})$	$c^3(\{x\})$	$c^4(\{x\})$
1	{1,7}	$c^2 = c^1 = F(1)$	F(1)	
2	{2,5}	{2,5,6}	$c^3 = c^2 = F(2)$	
3	{2,3}	{2,3,5}	{2,3,5,6}	$c^4 = c^3 = F(3)$
4	{3,4,5}	{2,3,4,5,6}	$c^3 = c^2 = F(4)$	
5	{5,6}	$c^2 = c^1 = F(5)$	$c^3 = F(5)$	
6	{6}	$c^2 = c^1 = F(6)$	$c^3 = F(6)$	
7	{1,7}	$c^2 = c^1 = F(7)$	$c^3 = F(7)$	
8	{1,8}	{1,7,8}	$c^3 = c^2 = F(8)$	

Fuente: Elaboración propia.

Ahora se procede a determinar los conjuntos cerrados minimales a partir de los F(x). Recuérdese que cada cerrado minimal es de la forma F(x) para algún $x \in E$, y que A es cerrado minimal si y solo si para cada $x \in A$, F(x)= A:

Se tiene

$F(1)= \{1,7\}=F(7)$. Luego F(1) es cerrado minimal.

$F(6)= \{6\}$. Por lo tanto es cerrado minimal.

Usando la notación $P \subsetneq Q$ para P contenido en Q y distinto de Q, se tiene:

$F(2) \subsetneq F(3) \subsetneq F(4)$, $F(6) \subseteq F(5) \subsetneq F(2)$.

$F(7) \subsetneq F(8)$

Luego, tomando en cuenta que si $F(x) \subsetneq F(y)$, entonces F(y) no es cerrado minimal, los conjuntos cerrados no minimales son F(2), F(3), F(4), F(5) y F(8).

3.6. Preclausura inducida por un conjunto de relaciones

Sea E un conjunto y δ un conjunto de relaciones en E. Entonces cada relación $R \in \delta$ induce un operador de preclausura c_R en E según se vio en los parámetros anteriores: para $A \subseteq E$, $c_R(A) = A \cup R^{-1}(A)$ Por otro lado, si para $A \subseteq E$, se define

$$c(A) = A \cup \{x \in E: R(x) \cap A \neq \emptyset \text{ para cada } R \in \delta\}$$

Entonces c es un operador de preclausura en E. Más aún, recordando que $R^{-1}(A) = \{x \in E: R(x) \cap A \neq \emptyset\}$, es fácil verificar que c(A) es la intersección de los conjuntos $c_R(A)$ cuando R varía en δ:

$$c(A) = \cap \{c_R(A): R \in \delta\} \text{ o, también, } c(A) = A \cup (\cap \{R^{-1}(A): R \in \delta\}).$$

Así la preclausura c es la intersección de las preclausuras c_R. Más aún, c es isótona porque cada c_R lo es, pero en general no es aditiva, aún cuando cada c_R es aditiva, como lo muestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3.4. (por fila)

Sea E={1,2,3} y R y S las siguientes relaciones en E definidas así:

1R1, 1R2, 2R2, 3R3

1S1, 2S2, 1S3, 3S3

Entonces:

$$c_R(\{1\}) = R^{-1}(1) = \{1\},\ c_R(\{2\}) = R^{-1}(2) = \{1,2\} \text{ y } c_R(\{3\}) = R^{-1}(3) = \{3\}$$

$$c_S(\{1\}) = S^{-1}(1) = \{1\},\ c_S(\{2\}) = S^{-1}(2) = \{2\} \text{ y } c_S(\{3\}) = S^{-1}(3) = \{1,3\}$$

Recordando que $c_R(A) = R^{-1}(A)$ y $c_S(A) = S^{-1}(A)$, ya que R y S son reflexivas, se tiene que si A= {2,3}:

$$c_R(\{A\}) = R^{-1}(A) = R^{-1}(2) \cup R^{-1}(3) = \{1,2,3\}$$

$$c_S(\{A\}) = S^{-1}(A) = S^{-1}(2) \cup S^{-1}(3) = \{1,2,3\}$$

De aquí se deduce que $c(\{A\}) = c_S(A) \cap c_R(A) = \{1,2,3\}$

Por otro lado, $c(\{2\}) \cup c(\{3\}) = (c_R(\{2\}) \cap c_S(\{2\})) \cup (c_R(\{3\}) \cap c_S(\{3\})) = \{2\} \cup \{3\} = \{2,3\}$.

En conclusión, $c(\{2,3\}) \neq c(\{2\}) \cup c(\{3\})$ y por lo tanto c *NO* es aditiva.

Ejemplo 3.5. (por fila)

Considérese el conjunto E de comerciantes de alguna ciudad que están relacionados por la relación de compra-venta, estipulada de la siguiente forma: Sea Vyx el valor en miles de bolívares de las ventas del comerciante x al comerciante y, y sea $\sum_x$ el valor de las ventas totales de x.

Se define en E la siguiente relación R: *xRy si y solo si Vxy es mayor o igual al 20% de* $\sum_x$, es decir, el valor de las ventas de y a x representa más del 20% del valor de las ventas totales de y.

La siguiente matriz es la matriz de compra-venta entre los comerciantes: El eje horizontal representa las compras o egresos, y el eje vertical representan las ventas o ingresos: La suma de las ventas coincide con la suma total de los gastos para cada comerciante.

Ahora se expresa de manera sencilla la relación R para construir su gráfico a partir de la matriz compra-venta: xRy, en la cual el valor corresponde a la fila *y*, y la columna *x*. Véase: xRy si y solo si $Vyx \geq 20\% * \sum_y Vyx = \frac{\sum_y Vyx}{5}$, es decir, xRy si y solo si $5Vyx \geq \sum_y Vyx$. Recuérdese que $\sum_x$ Vyx es la suma de los elementos en la columna *x*, y $\sum_y$ Vyx es la suma de los elementos de la fila *y*. Supóngase que el conjunto E consta de 10 comerciantes.

Cuadro 2. Matriz de compra-venta

x/y	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	$\sum_x$
1		1	0	3	0	1	1	1	2	1	10
2	1		0	0	2	0	2	0	1	1	7
3	0	0		0	1	2	0	3	0	1	7
4	3	1	0		0	1	0	0	2	1	8
5	0	2	1	0		0	3	0	0	1	7
6	1	0	2	1	0		0	3	1	1	9
7	1	1	0	1	3	0		1	0	0	7
8	1	0	3	1	1	2	0		0	0	8
9	2	0	1	2	0	0	1	0		0	6
10	1	2	0	0	0	3	0	0	0		6
$\sum_y$	10	7	7	8	7	9	7	8	6	6	

Fuente: Elaboración propia.

El conjunto de números resaltados determina el gráfico de R. Así por ejemplo, se debe tener 4R1, 9R1, 5R2, 7R2, etc. Véase entonces si es así:

V_{14} = 3 (fila 1 y columna 4) : 5,3 > 8 = $\sum_4 \rightarrow 4R1$
V_{19} = 2 (fila 1 y columna 9) : 5,2 > 6 = $\sum_9 \rightarrow 9R1$
V_{25} = 2 (fila 2 y columna 5) : 5,2 > 7 = $\sum_5 \rightarrow 5R2$
V_{27} = 2 (fila 2 y columna 7) : 5,2 > 7 = $\sum_7 \rightarrow 7R2$
V_{36} = 2 (fila 3 y columna 6) : 5,2 > 9 = $\sum_6 \rightarrow 6R3$
V_{38} = 3 (fila 3 y columna 8) : 5,3 > 8 = $\sum_8 \rightarrow 8R3$
V_{41} = 3 (fila 4 y columna 1) : 5,3 > 10 = $\sum_1 \rightarrow 1R4$
V_{49} = 2 (fila 4 y columna 9) : 5,2 > 6 = $\sum_9 \rightarrow 9R4$
V_{52} = 2 (fila 5 y columna 2) : 5,2 > 7 = $\sum_2 \rightarrow 2R5$
V_{57} = 3 (fila 5 y columna 7) : 5,3 > 7 = $\sum_7 \rightarrow 7R5$
V_{63} = 2 (fila 6 y columna 3) : 5,2 > 7 = $\sum_2 \rightarrow 3R6$
V_{68} = 3 (fila 6 y columna 8) : 5,3 > 8 = $\sum_8 \rightarrow 8R6$
V_{75} = 3 (fila 7 y columna 5) : 5,3 > 7 = $\sum_5 \rightarrow 5R7$
V_{83} = 3 (fila 8 y columna 3) : 5,3 > 7 = $\sum_3 \rightarrow 3R8$
V_{86} = 2 (fila 8 y columna 6) : 5,2 > 9 = $\sum_6 \rightarrow 6R8$
V_{91} = 2 (fila 9 y columna 1) : 5,2 > 10 = $\sum_1 \rightarrow 1R9$
V_{94} = 2 (fila 9 y columna 4) : 5,2 > 8 = $\sum_4 \rightarrow 4R9$
V_{102} = 2 (fila 10 y columna 2) : 5,2 > 7 = $\sum_2 \rightarrow 2R10$
V_{106} = 3 (fila 10 y columna 6) : 5,3 > 9 = $\sum_6 \rightarrow 6R10$

Con la información sobre R dada en la última columna del cuadro anterior, resulta en:

$R^{-1}(1)$= {4,9}; $R^{-1}(2)$= {5,7}; $R^{-1}(3)$= {6,8}; $R^{-1}(4)$= {1,9}; $R^{-1}(5)$= {2,7};
$R^{-1}(6)$= {3,8}; $R^{-1}(7)$= {5}; $R^{-1}(8)$= {3,6}; $R^{-1}(9)$= {1,4}; $R^{-1}(10)$= {2,6}

Con estos resultados se obtiene el cuadro 3 de las clausuras.

Los resultados anteriores proporcionan la clausura de cada elemento x.

F(1)=F(4)=F(9)={1,4,9}: es un cerrado minimal
F(2)=F(5)=F(7)={2,5,7}: es un cerrado minimal
F(3)=F(6)=F(8)={3,6,8}: es un cerrado minimal

Resta F(10) que es cerrado pero *NO* es minimal porque contiene propiamente los cerrados {2,5,7} y {3,6,8}.

Cuadro 3. Conjuntos clausura de orden n

x	$c(\{x\})$	$c^2(\{x\})$	$c^3(\{x\})$
1	{1,4,9}	$c^2 = c^1 = F(1)$	
2	{2,5,7}	$c^2 = c^1 = F(2)$	
3	{3,6,8}	$c^2 = c^1 = F(3)$	
4	{1,4,9}	$c^2 = c^1 = F4)$	
5	{2,5,7}	$c^2 = c^1 = F(5)$	
6	{3,6,8}	$c^2 = c^1 = F(6)$	
7	{5,7}	{2,5,7}	$c^2 = c^1 = F(2) = F(5) = F(7)$
8	{3,6,8}	$c^2 = c^1 = F(8)$	
9	{1,4,9}	$c^2 = c^1 = F(9)$	
10	{2,6,10}	{2,3,5,6,7,8,10}	$c^2 = c^1 = F(10)$

Fuente: Elaboración propia.

Ejemplo 3.6. (por fila)

Este ejemplo es análogo al anterior con las diferencias de que ahora el conjunto E consta de 20 comerciantes y la relación R de influencia es como sigue: Dados x e y $\in$ E, se define xRy si y solo si Vyx es mayor o igual al 25% de $\sum_x$ Vyx, donde Vyx y $\sum_x$ Vyx son como en el ejemplo anterior. Es decir, xRy si y solo si Vyx $\geq$ 25%* $\sum_x$ Vyx. De otra manera, xRy si y solo si 4*Vyx $\geq$ $\sum_x$ Vyx. En el presente ejemplo xRy si y solo si las ventas de *x* a *y* representan más del 25% de las ventas totales a x.

Seguidamente en el cuadro 4 se define la matriz de compra-venta en E: las filas se refieren a los egresos o compras y las columnas representan a los ingresos o ventas. Los elementos de la matriz son los números Vyx, que representan el valor en miles de bolívares de las ventas del comerciante *x* al comerciante *y*.

En la matriz mostrada en el cuadro 4 los valores resaltados determinan la relación R así:

$V_{15} = 4$ (fila 1 y columna 5) y $4V15 = 16 = \sum_5 \rightarrow 5R1$

$V_{17} = 4$ (fila 1 y columna 7) y $4V17 = 16 > \sum_7 \rightarrow 7R1$

$V_{19} = 5$ (fila 1 y columna 9) y $4V15 = 20 > \sum_9 \rightarrow 9R1$

Continuando se obtiene

$V_{2,4} = 3$ y 4R2, $V_{2,6} = 3$ y 6R2

$V_{3,8} = 2$ y 8R3, $V_{3,10} = 2$ y 10R3

Cuadro 4. Matriz de compra-venta

X/Y	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	$\sum_y$
1					4		4		5		1		1								15
2				3		3								1		1					8
3					1			2		2		1					1				7
4		3				3			2						1	2		1			12
5	4		1				4		4			1		1					1		16
6		3		3							1						1			1	9
7	4				4	1			4						1						14
8			2							2		1		1					1	1	8
9	4			2	4		4													1	15
10		1	2			1		2			1						1				8
11					1					1			4		4		2		1	1	14
12			1			1		1						3		3		3			12
13					1			1		1	4				3						10
14		1		2								3				3		3			12
15					1		1			1	4		3								10
16			1								1	3		3				4			12
17	2			1						1			2						3	3	12
18	1			1				1				3		3		3					12
19							1				1						3	1		3	9
20								1			1				1		4		3		10
$\sum_x$	15	8	7	12	16	9	14	8	15	8	14	12	10	12	10	12	12	12	9	10	

Fuente: Elaboración propia.

$V_{4,2} = 3$ y 2R4, $V_{4,6} = 2$ y 6R4
$V_{5,1} = 4$ y 1R5, $V_{5,7} = 4$ y 7R5, $V_{5,9} = 2$ y 9R5
$V_{6,2} = 3$ y 2R6, $V_{6,4} = 3$ y 4R6
$V_{7,1} = 4$ y 1R7, $V_{7,5} = 4$ y 5R7, $V_{7,9} = 4$ y 9R7
$V_{8,3} = 2$ y 3R8, $V_{8,10} = 2$ y 10R8
$V_{9,1} = 4$ y 1R9, $V_{9,5} = 4$ y 5R9, $V_{9,7} = 4$ y 7R9
$V_{10,3} = 2$ y 3R10, $V_{10,8} = 2$ y 8R10
$V_{11,13} = 4$ y 13R11, $V_{11,15} = 4$ y 15R11

$V_{12,14}$ = 3 y 14R12, $V_{12,16}$ = 3 y 16R12, $V_{12,18}$ = 3 y 18R12
$V_{13,11}$ = 4 y 11R13, $V_{13,15}$ = 3 y 15R13
$V_{14,12}$ = 3 y 12R14, $V_{14,16}$ = 3 y 16R14, $V_{14,18}$ = 3 y 18R14
$V_{15,11}$ = 4 y 11R15, $V_{15,13}$ = 3 y 13R15
$V_{16,12}$ = 3 y 12R16, $V_{16,14}$ = 3 y 14R16, $V_{16,18}$ = 4 y 18R16
$V_{17,19}$ = 3 y 19R17, $V_{17,20}$ = 3 y 20R17
$V_{18,12}$ = 3 y 12R18, $V_{18,14}$ = 3 y 14R18, $V_{18,16}$ = 4 y 16R18
$V_{19,17}$ = 3 y 17R19, $V_{19,20}$ = 3 y 20R19
$V_{20,17}$ = 4 y 17R20, $V_{20,19}$ = 3 y 19R20

Con los datos anteriores se procede a calcular las preclausuras c({x}) y las clausuras F(x), siendo $c(\{x\}) = \{x\} \cup R^{-1}(x) = \{x\} \cup \{y \in E{:}yRx\}$

Cuadro 5. Conjuntos clausura de orden n

x	c({x})	$c^2(\{x\})$
1	{1,5,7,9}	$c^2 = c^1 = F(1)$
2	{2,4,6}	$c^2 = c^1 = F(2)$
3	{3,8,10}	$c^2 = c^1 = F(3)$
4	{2,4,6}	$c^2 = c^1 = F(4) = F(2)$
5	{1,5,7,9}	$c^2 = c^1 = F(5) = F(1)$
6	{2,4,6}	$c^2 = c^1 = F(6) = F(4) = F(2)$ Cerrado minimal
7	{1,5,7,9}	$c^2 = c^1 = F(7) = F(5) = F(1)$
8	{3,8,10}	$c^2 = c^1 = F(8) = F(3)$
9	{1,5,7,9}	$c^2 = c^1 = F(9) = F(7) = F(5) = F(1)$ Cerrado minimal
10	{3,8,10}	$c^2 = c^1 = F(10) = F(8) = F(3)$ Cerrado minimal
11	{11,13,15}	$c^2 = c^1 = F(11)$
12	{12,14,16,18}	$c^2 = c^1 = F(12)$
13	{11,13,15}	$c^2 = c^1 = F(13) = F(11)$
14	{12,14,16,18}	$c^2 = c^1 = F(14) = F(12)$
15	{11,13,15}	$c^2 = c^1 = F(15) = F(13) = F(11)$ Cerrado minimal
16	{12,14,16,18}	$c^2 = c^1 = F(16) = F(14) = F(12)$
17	{17,19,20}	$c^2 = c^1 = F(17)$
18	{12,14,16,18}	$c^2 = c^1 = F(18) = F(16) = F(14) = F(12)$ Cerrado minimal
19	{17,19,20}	$c^2 = c^1 = F(19) = F(17)$
20	{17,19,20}	$c^2 = c^1 = F(20) = F(19) = F(17)$ Cerrado minimal

Fuente: Elaboración propia.

Conclusión: todas las clausuras F(x) son cerrados minimales, las cuales son seis diferentes en total y aparecen en el siguiente grafo:

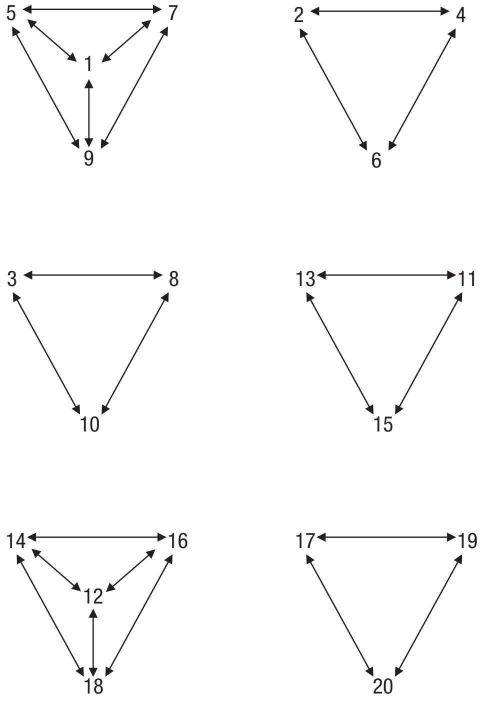


Figura 5. Fuente: Elaboración propia

El conjunto de los comerciantes queda dividido en seis clubes.

Ejemplo 3.7. (por columna)

En el cuadro 6 se muestra la matriz de coeficientes técnicos de la matriz de contabilidad social del 2005 agregada para la economía venezolana. Dados x y z ∈ E, se quiere encontrar la relación xRz, donde la condición es que z le compre a x en una proporción mayor o igual a 0,5.

Cuadro 6. Matriz de coeficientes

Transacciones	Código	Año 2005										
		c1	c2	c3	a1	a2	a3	reo	ee	ins	hog	bys
Productos	c1				0,020	0,080	0,003					0,043
	c2				0,003	0,004	0,015					
	c3				0,149	0,571	0,356					0,957
Actividades	a1	0,919	0,000	0,210								
	a2	0,001	0,002	0,267								
	a3	0,000	0,997	0,352								
Factores de producción	reo				0,097	0,118	0,450					
	ee				0,726	0,213	0,162					
Distribución del ingreso	ins								0,948	0,035	0,078	
	hog							1,000	0,052	0,089	0,038	
Consumo	bys										0,837	
Impuestos y Gobierno General	imp	0,003	0,001	0,050	0,004	0,013	0,014					
	gg								0,001	0,360	0,059	
Cuenta capital	cc									0,466	-0,013	
Cuenta financiera	cf											
Resto del mundo	cor	0,077		0,122				0,000		0,050	0,002	
	cap											
TOTAL		1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000

Fuente: BCV, Elaboración propia.

A partir de esta matriz, se construye la matriz de relaciones, donde los 1 representan los pares que cumplen con la relación xRz.

Cuadro 7. Matriz de relaciones

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	1										
2		1									
3			1		1						1
4	1			1							
5					1						
6		1				1					
7							1				
8				1				1			
9								1	1		
10							1			1	
11										1	1

Fuente: Elaboración propia.

Donde el conjunto de relaciones viene dado por: 1R1, 4R1, 2R2, 6R2, 3R3, 4R4, 8R4, 3R5, 5R5, 6R6, 7R7, 10R7, 8R8, 9R8, 9R9, 10R10, 11R10, 3R11, 11R11. Para dar como resultado el siguiente cuadro.

Cuadro 8. Pre-clausuras y clausuras

Z	*C({Z})*	*C² ({Z})*	*C³ ({Z})*	*C⁴({Z})*	*{Zclausura}*	
1	{1,4}	{1,4,8}	{1,4,8,9}	C^3	{1,4,8,9}	
2	{2,6}	C	C	C	{2,6}	
3	{3}	C	C	C	{3}	Minimal
4	{4,8}	{4,8,9}	C^2	C^2	{4,8,9}	
5	{3,5}	C	C	C	{3,5}	
6	{6}	C	C	C	{6}	Minimal
7	{7,10}	{7,10,11}	{7,10,11,3}	C^3	{7,10,11,3}	
8	{8,9}	C	C	C	{8,9}	
9	{9}	C	C	C	{9}	Minimal
10	{10,11}	{10,11,3}	C^2	C^2	{10,11,3}	
11	{3,11}	C	C	C	{3,11}	

Fuente: Elaboración propia.

Estas relaciones de influencia finales vienen dadas por los siguientes diagramas:

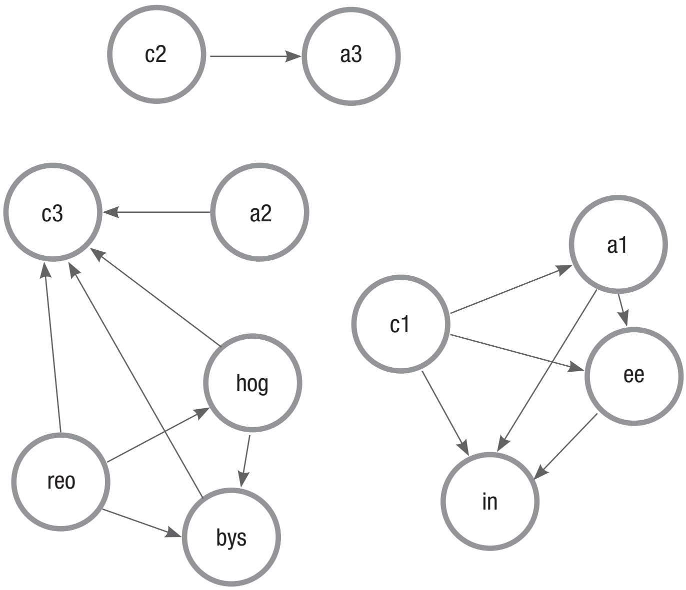


Figura 6. Fuente: Elaboración propia

Las relaciones resultantes del conjunto de clausura pueden interpretarse como el grado de importancia que tienen las relaciones entre cuentas. Partiendo de la relación establecida donde la cuenta z le compra a la cuenta x en una proporción mayor del 50%, el primer diagrama se interpreta como la actividad a3 está influenciada por el bien c2, a través de los pagos que hace el bien c2 a la actividad a3. De igual forma, el segundo diagrama muestra cómo el bien c3 está influenciado en forma directa por la actividad a2, a través de los pagos que hace esa actividad al bien c3. En el mismo diagrama se observan las transferencias directas que hacen las remuneraciones (reo) a los hogares (hog), que a su vez demandan bienes y servicios (bys), para estos bienes y servicios a su vez demandar el bien c3. En el tercer diagrama se observa como las instituciones (ins) son influenciadas por los pagos que hace el excedente de explotación (ee) a instituciones (ins). Pero (ee) está influenciado por la actividad a1 por los pagos que hace la actividad a1 al (ee). A su vez, la actividad a1 está influenciada por el bien c1, por el uso que hace la actividad a1 del producto c1. En el caso de a1, está influenciada solo por c1.

Estos diagramas permiten obtener una idea clara sobre las relaciones que existen entre las cuentas, algo que no es evidente al observar la matriz de coeficientes que se obtiene en una primera instancia. Así, por ejemplo, si se quiere estimular las instituciones, puede ser estimulando la producción de c1 o la actividad a1.

4. Conclusiones

Con el objetivo de caracterizar las actividades económicas, se hizo uso de los conceptos de pretopología en un contexto de matrices de contabilidad social. Luego de conceptualizar los elementos en los espacios pretopológicos, así como las operaciones que se realizan y las relaciones que se generan en esos espacios, se procedió a aplicar esos conceptos primero a una serie de ejemplos ilustrativos de cómo funcionan las relaciones y posteriormente se aplicó a las matrices de contabilidad social. Con la aplicación de esta metodología a las MCS se puede caracterizar, de acuerdo a una relación de influencia predefinida, la secuencia en que las actividades son estimuladas como consecuencia de un impacto de política.

Una vez aplicada la metodología, se procede a la caracterización y a su representación en grafos, que permite obtener una idea clara sobre las relaciones que existen entre las cuentas. Así también indica el grado de importancia que tienen las relaciones entre cuentas. Haciendo uso de esta metodología, cuando se tienen MCS extensas, se pueden identificar las relaciones entre las diferentes cuentas que a su vez permiten identificar ciertas relaciones que de otra forma no podrían ser identificadas.

Este trabajo incluye el desarrollo de un software para identificar los conjuntos cerrados minimales a partir de los cuales se puede hacer inferencia sobre los resultados obtenidos. La metodología constituye un instrumento que permite la caracterización de la economía y orientar el diseño de las políticas públicas.

5. Notas

1 En el espacio pretopológico del ejemplo 2.2., la preclausura c es idempotente, es decir, $c^2=c$, y además es isótona. Todo esto implica que la clausura F(A) de cada conjunto A coincide con c(A): F(A)=c(A). A continuación se tiene un resulta4do más general, en el sentido de que F(A) coincide con $c^i(A)$ para algún entero i ≥ 0.

2 Este resultado junto con la conclusión del teorema 2.1 sirve para calcular la clausura de cualquier subconjunto de un V-espacio pretopológico finito. Más aún, si (E, c) es un V-espacio pretopológico con n elementos y $A \subseteq E$ es un subconjunto con p elementos, entonces $c^{n-p}(A)$ es un conjunto cerrado y coincide con la clausura de A.

5. Referencias

Bonnevay, Stephane and Nicolas Nicoloyannis (1999). "A pretopological approach for structuring data in non-metric spaces." *Electronic notes in discrete mathematics*, 2, pp. 1-9.

Contreras, José y Nora Guarata (2011). *Introducción a los modelos de multiplicadores de las matrices de contabilidad social para la jerarquización de actividades económicas*. Notas del BCV: Caracas. (septiembre), 58 pp.

García Pérez, María Emilia y Valentín Solís Arias (2005). *Análisis estructural a través de un enfoque pretopológico y del programa Reso. Aplicación a una tabla input-output*. Tesis. Facultad de Economía, Universidad Autónoma de México y Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales, Universidad de Castilla-La Macha. 24 pp.

Thanh Van, Le; Nadia Kabachi, and Michael Lamure (2007). *A clustering method associated pretopological concepts and k-means algorithm*. Documento de trabajo. Université Claude Bernard Lyon 1. Laboratorie d´Informatique. Lyon.

Solís Arias, Valentín y Andrés Blancas (2005). "Pretopological analysis on the social accounting matrix for an eighteen-sector economy: The Mexican financial system," pp. 111-126 en: *New tools of economic dynamics*, Leskow *et al.* (eds). Editorial Springer.

6. Anexos

Demostración del teorema 2.2.

Supóngase que la sucesión $\{x_n\}$ es monótona creciente, y denótese con $\leq$ el orden parcial en H= $\{e_1,e_2,\ldots,e_i\}$. Sea N el conjunto de los números naturales y para cada i con $1 \leq i \leq s$, sea N_i $\{n \in N: x_n = e_i\}$. Entonces se tiene $N= N_1 \cup N_2 \ldots \cup N_s$ y como N es un conjunto infinito, existe un i_0 tal que N_{i_0} es un conjunto infinito. Sea n_0 el primer elemento de N_{i_0} y se prueba que si $n \in N$ y $n \geq n_0$, entonces $x_n = x_{n_0}$. En efecto dado $n \geq n_0$, entonces puesto que N_{i_0} es infinito existe un elemento m en N_{i_0} tal que $m \geq n$. Se tiene así que $n_0 \leq n \leq m$ y por lo tanto $x_{n_0} \leq x_n \leq x_m$ porque la sucesión $\{x_n\}$ es monótona creciente. Finalmente como n_0 y m están en N_{i_0}. Resulta que $x_m = x_{n_0}$ y en consecuencia $x_n = x_{n_0}$.

Demostración del teorema 2.3.

Supóngase (*i*) y sea $A \subseteq E$ y δ la familia de todos los conjuntos cerrados en E que contienen A. Puesto que $A \subseteq E$ y E es un conjunto cerrado, δ es un conjunto no vacío. Entonces, si se define F(A) como la intersección de todos los conjuntos en δ, resulta por (*i*) que F(A) es un conjunto cerrado tal que $A \subseteq F(A)$ y, por definición, F(A) está contenido en cada conjunto cerrado que contiene A. Estas propiedades de F(A) implican automáticamente su unicidad.

Recíprocamente, supóngase (*ii*) y sea δ una familia de conjuntos cerrados en E. Denótese con H al conjunto intersección de todos los conjuntos en δ. Se debe probar que H es un conjunto cerrado. Para ello considérese F(H) la clausura de H. Entonces $H \subseteq F(A)$ por definición de F(H) y, además, como cada X en δ es cerrado y contiene H, resulta que $F(H) \subseteq X$ para cada X en δ, y en consecuencia F(H) está contenido en la intersección H. Así resulta que H= F(H) y, por lo tanto, H es un conjunto cerrado.

Demostración del teorema 2.4.

Recuérdese en primer lugar que V-espacio significa que c es isótono: si $A \subseteq B \subseteq E$ entonces $c(A) \subseteq c(B)$. Sea ahora δ una familia de conjuntos cerrados en E y sea H la intersección de los conjuntos de δ. Entonces para cada X en δ, $H \subseteq X$ y por lo tanto $c(H) \subseteq c(X)$ ya que c es isótona y X es cerrado. En conclusión $c(H) \subseteq X$ para cada X de δ y en consecuencia $c(H) \subseteq H$ y así $c(H)= H$ y H es un conjunto cerrado.

Conviene señalar que para cada $A \subseteq E$, $c(A) \subseteq F(A)$, puesto que $A \subseteq F(A)$, c es isótona y la clausura F(A) de A es un conjunto cerrado.

Demostración del teorema 2.5.

En primer lugar, para cada entero $m \geq 0$, $A \subseteq c^m(A)$, en segundo lugar, si $B \subseteq E$ es un conjunto cerrado y $A \subseteq B$, entonces, puesto que c es isótona (E es un V-espacio), resulta también que c^n lo es, y en consecuencia $c^n(A) \subseteq c^n(B)$, donde $c^n(B) = B$ porque B es cerrado.

Demostración del teorema 2.6.

Denótese con *min*(A) el menor elemento de $A \neq \emptyset$ y supóngase que k(A)= *min*(A). Entonces A es un conjunto cerrado. Obsérvese ahora que A es minimal: Sea $B \subseteq A$ un conjunto cerrado con q= k(B) elementos. Entonces $q \in B \subseteq A$ y así $q \geq$ *min*(A). Por otro lado, de la inclusión $B \subseteq A$ se tiene que $k(B) \leq k(A)=$ *min*(A), y así k(B) = k(A) y por lo tanto A=B, ya que $B \subseteq A$ y, además, B y A tienen el mismo número de elementos.

Recíprocamente, supóngase que A es un conjunto cerrado minimal y pruébese que k(A)= *min*(A). Como A es cerrado $k(A) \in A$ y, por lo tanto, *min*(A) $\leq$ k(A).

Supóngase por reducción al absurdo que *min*(A) < k(A).

Para simplificar hágase a= *min*(A) y n= k(A); entonces si $A= \{e_1< e_2 \cdots < e_n\}$, $a= e_1 < k(A)= n$. Ahora considérese el conjunto $B= \{e_1, e_2 \cdots,e_a\}$, el cual es un subconjunto de A con $k(B) = a = e_1 \in B$ y en consecuencia B es un conjunto cerrado no vacío y además $B \neq A$, lo que contradice que A es un conjunto cerrado minimal. Se debe concluir entonces que a = n y *min*(A) = k(A).

Demostración del teorema 3.1.

Sea $A \subseteq E$. Entonces puesto que

$$c_R^2(A) = c_R(A) \cup R^{-1}(c_R(A)) = A \cup R^{-1}(A) \cup R^{-1}(R^{-1}(A)),$$

será suficiente probar que $R^{-1}(R^{-1}(A)) \subseteq R^{-1}(A)$ si R es una relación transitiva, para que $c_R^2 = c_R$.

Obsérvese $x \in R^{-1}(R^{-1}(A))$ si y solo si existe un $y \in R^{-1}(A)$ tal que xRy. Ahora $y \in R^{-1}(A)$ si y solo si existe un $z \in A$ tal que yRz. Si R es transitiva, resulta entonces que xRz; y en consecuencia $x \in R^{-1}(A)$.

Recíprocamente, supóngase que $c_R^2 = c_R$ y demuéstrese que R es transitiva.

En efecto si xRy e yRz, entonces $x \in c_R(\{y\})$, e $y \in c_R(\{z\})$. Luego $c_R(\{y\}) \subseteq c^2(\{z\}) = c_R(\{z\})$, y por lo tanto $x \in c_R(\{z\})$, lo que significa que xRz.

Demostración del teorema 3.2.

Se hace hincapié que un operador de preclausura inducido por una relación verifica las condiciones () y () del teorema y de aquí la importancia de este teorema.

(*i*) Si c es completamente aditivo y $A \subseteq E$, entonces $c(A) = \cup \{c(\{x\}) : x \in A\}$. Por lo tanto A es cerrado si y solo si $c(\{x\}) \subseteq A$ para cada $x \in A$.

(*ii*) Si c es isótona tenemos definida la clausura F(A) de cada conjunto $A \subseteq E$. Entonces si A es un cerrado minimal y $x \in A$, tenemos $\{x\} \subseteq A$ y por lo tanto $F(x) \subseteq F(A) = A$ y siendo A minimal y $F(x) \neq \emptyset$, resulta que $F(x) = A$. Recíprocamente si para cada $x \in A$, $F(x)=A$, entonces A es cerrado. Obsérvese que A es minimal:

Si $B \neq \emptyset$ es cerrado y $B \subseteq A$, tomar un elemento $z_0 \in B$, entonces $F(z_0) \subseteq B \subseteq A$ y siendo z_0 un elemento de A, la hipótesis implica que $F(z_0) = A$ y así $A = B$.